

**ИЖАНОВА КАМИЛА АЛИБЕКОВНА**

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО НАГРУЖЕННОГО  
УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

**АННОТАЦИЯ**

**Диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по  
образовательной программе 8D05401-Математика**

**Актуальность темы.** В современной математике и прикладных науках растёт интерес к моделям, описывающим процессы с памятью, наследственностью, фрактальными структурами и крупномасштабными неоднородностями. Такие явления часто невозможно адекватно описать с помощью классических дифференциальных уравнений целочисленного порядка. В связи с этим дифференциальные уравнения дробного порядка приобрели особую популярность в последние десятилетия, предоставляя более гибкий инструмент для моделирования сложных систем, особенно в условиях нелинейности, запаздывания и нестационарности среды.

Также математические модели нелокальных физических и биологических фрактальных процессов основаны на нагруженных дифференциальных уравнениях с дробными частными производными. В монографии А.М. Нахушев дал подробную библиографию по нагруженным уравнениям, включающую различные приложения нагруженных уравнений как метода исследования задач математической биологии, математической физики, математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошной среды с памятью. Дробные диффузионно-волновые уравнения широко применяются в различных областях науки и техники. В своей работе Е.Шитикова представляет обзор недавних исследований по применению дробного исчисления к линейным моделям вязкоупругости, используемым в задачах динамической механики твёрдого тела.

Для решения этих уравнений существуют различные методы решения: метод функций Грина, метод конечного синусного преобразования, метод разделения переменных, метод конечных разностей, метод разложения Адомиана (ADM) и схема конечных разностей. Недавно Kasemi and Rostam предложили новый локальный разрывный метод Галеркина для уравнения диффузионной волны дробного времени. Уравнение было решено путём определения разрывного конечного элемента 1-й степени с интерполированными коэффициентами.

С математической точки зрения, представляет интерес исследование краевых задач для уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой, когда

нагруженный член рассматривается в виде дробной производной или дробного интеграла. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных операторов можно интерпретировать как функционально-дифференциальный оператор вида:  $Lu + \gamma Mu = f$ , где  $L$  – дифференциальная часть, а  $M$  – нагруженная часть. Нагруженный член в уравнении рассматривается как возмущение. Более того, он содержит след некоторых операций из искомого решения  $u$ . Если нагруженный член содержит след дробной производной искомой функции, то мы имеем дело с нелокальностью, то есть текущее состояние системы зависит от её предыстории, но эта зависимость выражается через интеграл от прошлых значений функции. В некоторых работах показано, что существование и единственность решений дробно-нагруженных краевых задач в некоторых функциональных классах зависят от порядка дробной производной в нагруженном члене. Также показано, что для краевой задачи с нагрузкой по пространственной переменной при некоторых значениях дробной производной реализуется спектральный случай, а именно, полученное интегральное уравнение Вольтерра имеет собственную функцию. Подобные интегральные уравнения Вольтерра возникают также при исследовании краевых задач в вырождающихся областях.

**Цель работы.** Постановка и решение краевых задач для нагруженного уравнения это постановка и решение краевых задач для нагруженных уравнений, содержащих оператор дробного интегро-дифференцирования; установление условий существования и единственности их решений.

**Задачи исследования:**

1. Сформулировать краевые задачи (всего семь) для нагруженных уравнений и/или уравнений дробного порядка, рассматривая различные типы дробных операторов (Римана-Лиувилля, Капуто), пространственные размерности и геометрии областей (включая нецилиндрические области).

2. Свести задачи к интегральным или дифференциальным уравнениям и получить точные решения для некоторых полученных интегральных или дифференциальных уравнений, представив их в замкнутом виде с помощью специальных функций дробного исчисления.

3. Для других поставленных задач произвести оценку ядра возникающих интегральных уравнений на основе асимптотического поведения специальных функций.

4. Провести качественный анализ задач, классифицируя нагруженные слагаемые как слабые или сильные возмущения в зависимости от их влияния на единственность решения, выявить и проанализировать критический «спектральный случай», при котором задача имеет неединственное решение, и найти соответствующую собственную функцию однородной задачи.

5. Сформулировать и доказать теоремы о существовании и единственности решений граничных задач при определенных условиях на начальные данные и параметры нагруженного слагаемого.

**Методы исследования.** В работе используются методы общей теории дифференциальных уравнений, функционального анализа и дробного исчисления, методы интегральных преобразований и основы теории сингулярных интегральных уравнений.

**Научная новизна.**

Ранее были проведены исследования краевых задач для дробно-нагруженного одномерного уравнения теплопроводности в случае, когда нагруженное слагаемое уравнения представлено в виде дробной производной порядка меньшего, чем порядок уравнения. Теперь поставлены и исследованы новые типы краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка, в которых нагруженные слагаемые включают: дробный интеграл, дробные производные как по временной, так и по пространственной переменной, произведения со степенным коэффициентом. Точки нагрузки движутся как по кривой (в одномерном случае), так и по поверхности (в двумерном, в многомерном случае). Установлено, что нагруженное слагаемое может выступать в роли: слабого возмущения, сохраняющего единственность решения (типично для дробных интегралов или производных низкого порядка); сильного возмущения, приводящего к неединственности и существованию нетривиальных решений однородной задачи (типично для дробных производных высокого порядка). Кроме того, обнаружен «спектральный случай» для задач со степенным коэффициентом в нагруженном слагаемом. Доказано, что при показателе  $\mu$ , равном разности порядков производных в уравнении и нагруженном слагаемом ( $\mu = \beta - \alpha$ ), однородная задача приобретает спектр и обладает бесконечным множеством нетривиальных решений.

**Теоретическая и практическая значимость исследования.**

Работа носит теоретический характер. Она вносит вклад в современную теорию краевых задач для уравнений в частных производных (УЧП), рассматривая класс уравнений с двумя различными характеристиками: дробным оператором в главной части уравнения и/или в нагруженном слагаемом уравнения задачи. Она выходит за рамки классической теории УЧП и переходит к нелокальным задачам, где поведение уравнения в точке зависит от поведения решения во всей области определения или в конкретных точках/моментах времени. Поэтому теоретическая ценность работы заключается в развитии теории нелокальных задач. Ключевым теоретическим открытием является

установление прямой связи между типом нагруженного слагаемого (например, дробная производная или дробный интеграл) и фундаментальным свойством единственности решения. Это даёт ключевой критерий для классификации таких задач и исследования их корректности.

Результаты актуальны для различных областей, включая дробную вязкоупругость, термодинамику сред с памятью, динамику популяций с нелокальным взаимодействием и финансовую математику с эффектами наследственности.

#### **Основные результаты, выносимые на защиту:**

1. Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с дробным оператором в главной части и/или нагруженным слагаемым в виде дробной производной или интеграла как отдельного класса нелокальных задач, свойства которых не сводятся к свойствам классических уравнений в частных производных.

2. Сведение поставленных краевых задач к интегральным или дифференциальным уравнениям и их исследование.

3. Построение решений интегральных уравнений в явном виде и/или оценка их ядер на основе асимптотического поведения специальных функций

4. Разрешимость поставленных граничных задач в зависимости от конкретного вида нагруженного слагаемого.

5. Нахождение собственной функции для задачи со степенным коэффициентом в нагруженном слагаемом.

#### **Достоверность и обоснованность результатов.**

Конструктивность использованных в работе методов обеспечивает достоверность и обоснованность исследования. Общие выводы сформулированы в виде теорем и приведены их доказательства.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 13 работ, из них 4 статьи опубликованы в журналах, входящих в список Scopus, 9 работ опубликованы в сборниках трудов международных научных конференций.

#### **Апробация работы.**

По результатам диссертации были сделаны доклады на международных конференциях и на конференциях дальнего зарубежья:

1. Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (Turkestan, September 20-23, 2023).

2. VII Международной научной Конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 4-8 декабря 2023).

3. Evolution Equations, Approximation and Spectral Optimization: book of abstracts of International Summer School & Conference (Almaty, September 11-14, 2024).

4. Actual problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2024: abstracts of the IX international scientific conference, dedicated to the 630th anniversary of the birth of Mirzo Ulugbek (Tashkent, October 22-23, 2024).

5. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня науки республики Казахстан: тезисы докладов (Алматы, 1-4 апреля 2025).

6. Artificial Intelligence and Inverse Problems in Science, Technology and Industry: Proceedings (Astana, April 14-16 2025).

7. 15-th ISAAC Congress: Abstract book (Astana, July 21-25, 2025).

8. The 10th International Conference on Differential and Functional Differential Equations dedicated to the memory of academician S.P. Novikov: Abstracts (Moscow, August 17-24, 2025).

9. Международная научная конференция «Актуальные вопросы междисциплинарных научных исследований», организованная по случаю 100-летия академика Е.А. Букетова. (Караганда, 17-20 июня, 2025).

**Вклад докторанта в подготовку каждой публикации.** В 13 работах, выполненных совместно с научными руководителями и соавторами, научные руководители произвели постановку задачи, а докторант самостоятельно сформулировал основные и дополнительные результаты и представил их доказательства.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация объемом 74 страниц состоит из следующих структурных элементов: обозначения, введение, два раздела, заключение и список литературы.

**Количество использованных источников- 64.**

**Ключевые слова.** Нагруженное уравнение, уравнение теплопроводности, уравнение диффузии, двумерное нагруженное уравнение теплопроводности.